Διάλεξη 2η (1)

11/10/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣΜ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ: (α' τάξης)

$$y' = \frac{P(t)}{Q(y)} \rightsquigarrow \underbrace{Q(y)\,y' = P(t)}$$

2 δυνατοί τρόποι επίλυσης:

α) Αόριστη λύση:

$$\int Q(y)\,dy = \int P(t)\,dt + c$$

β) Ορισμένη λύση:

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} Q(y)\,dy = \int_{t_0}^{t} P(s)\,ds$$

Παράδειγμα:

(*) $y'(t) = (t^2+2)\,y,\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\frac{y'(t)}{y} = t^2+2,\quad y\neq 0 \ (**) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (t^2+2)\,dt \Rightarrow \ln|y| = \frac{t^3}{3} + 2t + c \Rightarrow |y| = e^{t^3/3+2t+c}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{t^3/3+2t}\, e^{c} \Rightarrow y = \pm e^{t^3/3+2t}\cdot e^{c} \Rightarrow \underbrace{y(t) = c\cdot e^{t^3/3+2t}}\ (A),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Στο σημείο αυτό ελέγχω αν αυτή η λύση είναι όντως λύση της αρχικής (*).

Επίσης στο σημείο (**) πήρα περιορισμό $y\neq 0$. Πρέπει να ελέγξω τι γίνεται στο μηδέν. Παρατηρώ ότι ο τύπος (A) ισχύει και για το μηδέν // Οπότε το $c=0$ είναι "δεκτό".

<u>Παράδειγμα</u>: $y'(t)=f(t)$, $t\in I$

$y'(t)=t^2+3$, $t\in\mathbb{R}$.

<u>Αορ. ολοκλ.</u>: $y(t)=\frac{t^3}{3}+3t+c$

Όταν θέλω να βρω $y(1)=7$... τότε πρέπει να βρω για ποιο c, $y(1)=7$.

<u>Οριστ. ολοκλ.</u>: $\int_1^t y'(s)ds=\int_1^t (s^2+3)ds$

$$y(t)=\underset{7}{\underset{\shortparallel}{y(1)}}+\frac{s^3}{3}+3s\Big|_1^t$$

Αυτός ο τρόπος επίλυσης καλείται πρόβλημα αρχικών τιμών. (<u>Π.Α.Τ</u>)

<u>Παράδειγμα</u>: $y''(t)=f(t)$, $t\in I$

$$\int y'(t)dt=\int f(t)dt+c_0$$

$$y'(t)=\int f(t)dt+c_0$$

$$y(t)=\iint f(t)dt+c_0t+c_1$$ (2 παραμ.: c_0, c_1)

<u>π.χ.</u> α) $y''(t)=e^t+2t$, $t\in\mathbb{R}$: (A)

$$y'(t)=\int(e^t+2t)dt+c_0=e^t+t^2+c_0$$

$$\Rightarrow y(t)=\int(e^t+t^2)dt+c_0t+c_1$$

$$\Rightarrow y(t)=e^t+\frac{t^3}{3}+c_0\cdot t+c_1,\ t\in\mathbb{R}.$$

Αόριστη ολοκλ. προβλήματος αρχικών τιμών.

Αν ζητούσε να λυθεί η (A) για $y(0)=1$ και $y'(0)=7$ τότε αυτό θα αποτελούσε ένα $\boxed{\text{πρόβλημα αρχικών τιμών}}$. Αυτές οι 2 πληροφορίες ($y(0)=1$ και $y'(0)=7$) είναι απαραίτητες για να καθοριστεί η τελική συνάρτηση $y(t)$.

Συγκεκριμένα: $y(0)=1+c_1=1$

$y'(0)=1+c_0=7$

B) $y''(t) = f(t),\ t \in I$

$y''(t) = e^t + t^2,\ t \in \mathbb{R}.$

ορισμένη ολοκλήρωση //

$$\int_7^t y''(s)\,ds = \int_7^t (e^s + s^2)\,ds$$

$$y'(t) - y'(7) = e^s + \frac{s^3}{3}\Big|_7^t \Rightarrow y'(t) = y'(7) + e^t + \frac{t^3}{3} - e^7 - \frac{7^3}{3}$$

$$= e^t + \frac{t^3}{3} + \underbrace{y'(7) - e^7 - \frac{7^3}{3}}_{= c_0}$$

$$= e^t + \frac{t^3}{3} + c_0$$

$$y(t) = y(7) + c_0 \cdot t + e^s + \frac{s^4}{12}\Big|_7^t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Αν αντί για $7 \in I$ πάρω $t_0 \in I$ καθώς $t \in I$ θα έχω:

$$y''(t) = f(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t y''(s)\,ds = \int_{t_0}^t f(s)\,ds \Rightarrow y'(t) - y'(t_0) = \int_{t_0}^t f(s)\,ds.$$

$$\Rightarrow y'(t) = y'(t_0) + \int_{t_0}^t f(s)\,ds,\quad t \in I$$

$$\int_{t_0}^t y'(s)\,ds = \int_{t_0}^t y'(t_0)\,ds + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{u} f(s)\,ds\right] du$$

$$\boxed{y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u f(s)\,ds\,du,\quad t \in I}$$

<u>Παρατήρηση</u>: $$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^u f(s)\,ds\,du = u\int_{t_0}^u f(s)\,ds\Big|_{u=t_0}^{u=t} - \int_{t_0}^t u f(u)\,du$$

$$= t\int_{t_0}^t f(s)\,ds - \int_{t_0}^t f(u)\,du = \int_{t_0}^t (t-u) f(u)\,du$$

Homework:

(1) νδο: $$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(u)\,du\,dt_{n-1}\,dt_1 = c\int_{t_0}^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du$$

(ii) $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}(t-u)^k f(u)\,du = ;$ Υποδ: Να θυμηθώ το τριγωνικό χωρίο απ' τον απ.3.

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

▸ - Σπουδαιότατοι βαθματικοί παραστ. αναπαραστ.

$$x\,dx-(5y^3+3)\,dy=0 \Rightarrow x-(5y^3+3)\frac{dy}{dx}=0$$

(y)'

$$\Rightarrow x=(5y^3+3)\cdot y'$$

$$\Rightarrow \frac{5y^4}{4}+3y=\frac{x^2}{2}+c$$

▸ $2x(y^2+y)\,dx=-(x^2-1)\,y\,dy$

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx=\frac{y}{y^2+y}\,dy\,,\quad x\neq\pm1 \wedge y\neq 0$$

$$=\frac{1}{y+1}\,,\quad y\neq -1$$

$$\Rightarrow \dots\dots \Rightarrow y(t)=-1+\frac{c}{x^2+1}.$$

Αν έχω σταθερές τιμές (λύσεις) $\Rightarrow dy=0$.
Οι σταθερές λύσεις ερευνώνται απ' την αρχή!

Άσκηση (υολίη)

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για:

$(y^2-1)dx + y(x-1)dy = 0$

$y(0) = -2$.

$y=1, y=-1$.

Λύση

$$\frac{dx}{x-1} = -\frac{y}{y^2-1}\,dy, \quad \overset{(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}{x \neq 1}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{1 + \frac{c}{(x-1)^2}}$$

εφόσον $y(0)=-2$

$-2 = -\sqrt{1+\frac{c}{1}}$

$\Rightarrow c = 3$

Άρα $y(x) = -\sqrt{1+\frac{3}{(x-1)^2}}, \quad x<1$

(*) Χρειάζεται να υπολογίσω το c για να βρω το π.ο.;

→ **Απαντ.**: Όχι γιατί το π.ο. το βρίσκω από το $y(0)=2$

(*) Ταυτίζονται οι λύσεις; → Όχι! Είναι πολύ αρμοστική.

π.χ.

$$y'(t) = f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,5] \\ 2, & t \in [5,+\infty) \end{cases}$$

Για $0 \le t \le 5$: $\int_0^t y'(s)ds = \int_0^t f(s)ds$

$$y(t) - y(0) = s\Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$y(t) = y(0) + t, \quad 0 \le t \le 5$$

Για $5<t$: $y(t)-y(0) = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow y(t) = y(0) + \int_0^5 f(s)ds + \int_5^t f(s)ds$

$\Rightarrow y(t) = y(0)+5+\int_5^t 2ds = y(0)+5+[2s]_{s=5}^{s=t} = y(0)+5+2t-10$

Άρα

$$y(t) = \begin{cases} y(0)+t, & t\in[0,5] \\ y(0)+2t-10, & 5<t \end{cases}$$

Γραμμική συνάρτηση διαφορικών εξισώσεων α' τάξης:

$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t), \quad a,b,c: I \to \mathbb{R}, \quad a(t)\neq 0,\ t\in I, \quad a,b\in C(t).$$

αν $c(t)\equiv 0$ τότε είναι ΟΜΟΓΕΝΗΣ

αν $c(t)\not\equiv 0$ τότε είναι ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

$$\to y'(t)+\frac{b(t)}{a(t)}y(t)=\frac{c(t)}{a(t)}$$

$$\Rightarrow y'(t)+p(t)y(t)=q(t)$$

Συμβολισμός: Με E_0 συμβολίζουμε την ομογενή.

Τώρα έστω $y'(t)+p(t)y(t)=0,\ t\in I$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=-p(t)y(t),$$

$$\Rightarrow \text{για } y\neq 0:\ \frac{dy}{y}=-p(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|y|=-\int p(t)\,dt+c$$

$$\Rightarrow |y|=e^{-\int p(t)dt+c}$$

$$\Rightarrow y=\pm e^{c}e^{-\int p(t)dt}$$

$$\Rightarrow y(t)=ce^{-\int p(t)dt},\ t\in I$$

π.χ.

$$y'(t)+ky(t)=0,\quad y(t_0)=y_0$$

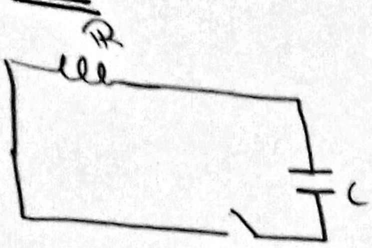
$$\int_{t_0}^{t}\frac{dy}{y}=-k\int_{t_0}^{t}ds \Rightarrow \ln|y(t)|\Big|_{t_0}^{t}=-k(t-t_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)|-\ln|y(t_0)|=-k(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)|=\ln|y(t_0)|-k(t-t_0)$$

$$\Rightarrow |y(t)|=e^{\ln|y(t_0)|-k(t-t_0)}$$

π.χ.



Εξίσωση φορτίου που διατρέχει το κύκλωμα αυτό είναι:

$$\boxed{C\cdot R\cdot Q'(t) + \frac{Q(t)}{RC} = 0}$$

$V = R\cdot I = R\cdot \frac{dQ}{dt}$

$V = \frac{Q(t)}{C}$

Ένταση ρεύματος: $I(t) = Q(0)\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\left(-\frac{1}{RC}\right)$

(*) Θεωρητικά η ένταση του ρεύματος δεν μηδενίζεται ποτέ!

Εξέλιξη πληθυσμών:

$$x(n+1) = x(n) + b\,x(n) - c\cdot x(n)$$

$$x(n+1) - x(n) = \underbrace{(b-c)}_{k}\cdot x(n)$$

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (b-c)\,x(t)$$

$x'(t) = k\,x(t) \rightsquigarrow x(t) = x(t_0)\,e^{-kt}$ → πολύ καλή προσομοίωση για προβλήματα πληθυσμού